ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐINH THỊ HUYỀN

VỀ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VỚI CÁC SỐ FIBONACCI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước hết, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành đến PGS. TS. Nông Quốc Chinh đã hướng dẫn tôi hoàn thành bản luận văn này. Khi bắt đầu nhận đề tài thực sự tôi cảm nhận đề tài mang nhiều nội dung mới mẻ. Hơn nữa với vốn kiến thức ít ỏi nên rất khó để tiếp cận đề tài. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Thầy vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên khuyến khích tôi trong suốt thời gian tôi thực hiện đề tài. Trong quá trình tiếp cận đề tài đến quá trình hoàn thiện luận văn Thầy luôn tận tình chỉ bảo và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi hoàn thành luận văn. Cho đến bây giờ luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành, xin cảm ơn Thầy đã đôn đốc nhắc nhở tôi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Toán - Tin và Phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô giáo trường THPT Hoa Lư A - Ninh Bình nơi tôi công tác đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành công việc chuyên môn tại nhà trường để tôi hoàn thành chương trình học tập cao học.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Tác giả

Đinh Thị Huyền

Mở đầu

Leonardo Pisano Bogollo (khoảng 1170 – khoảng 1250), còn được biết đến với tên **Leonardo của Pisa**, hay phổ biến nhất dưới cái tên Fibonacci, là một nhà toán học người Ý và ông được một số người xem là "nhà toán học tài ba nhất thời Trung Cổ". Fibonacci nổi tiếng trong thế giới hiện đại vì có công lan truyền hệ ký số Hindu-Ả Rập ở châu Âu, và đặc biệt là dãy số hiện đại mang tên ông, dãy Fibonacci trong cuốn sách Liber Abaci.

Dãy số Fibonacci là một trong những vẻ đẹp của kho tàng Toán học. Dãy Fibonacci xuất hiện và biến hóa vô tận trong tự nhiên, với rất nhiều tính chất đẹp và ứng dụng quan trọng. Đến nay có rất nhiều mở rộng của dãy Fibonacci như dãy k-Fibonacci... Hầu hết những tính chất tốt của những dãy này đều xuất phát từ dãy Fibonacci. Một dãy tồn tại song song với dãy Fibonacci là dãy Lucas. Dãy này có nhiều ứng dụng đặc biệt trong tìm nghiệm của các phương trình Diophantine. Hai dãy này là chúng có mối liên hệ chặt chẽ với nhau.

Trong tự nhiên có nhiều hiện tượng, sự vật xuất hiện trùng với dãy số Fibonacci. Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số 3, 5, 8. Số nhánh từ một cây khi đi từ gốc lên ngọn cũng thường tuân theo dãy Fibonacci khi từ 1 nhánh lên 2 nhánh, 3 nhánh rồi 5, 8, 13 nhánh. Những chiếc lá trên một nhành cây cũng tương ứng với dãy số Fibonacci. Trong luận văn này chúng ta đi tìm hiểu các bài toán riêng, bài toán tổng quát về phương trình tuyến tính trong đó các hệ nghiệm là các số Fibonacci.

Nội dung của luận văn trình bày trong hai chương. Chương 1 dành để trình bày lại số kiến thức liên quan đến số Fibonacci và số Lucas, giới thiệu hai bài toán 779 và 804 và lời giải của hai bài toán này. Các kết quả đã biết của chương này được viết theo tài liệu [1], [2], [3].

Chương 2 ta tập trung đi tìm hiểu bài toán tổng quát, lời giải bài toán trong khi $m = 3, 4$ từ đó đưa ra dự đoán lời giải cho bài toán tổng quát. Cụ thể trong phần 2.1 giới thiệu bài toán tổng quát. Phần 2.2 trình bày lời giải trong trường hợp $m = 3$ hoặc 4. Phần 2.3 trình bày lời giải cho trường hợp tổng quát đó là Định lý ngẫu nhiên. Phần 2.4 đến hết 2.8 là các kết quả xoay quanh việc chứng minh của Định lý ngẫu nhiên. Các kết quả đã biết của chương này được viết theo tài liệu [4].

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Dãy Fibonacci và dãy Lucas

Định nghĩa 1.1.1. Dãy số Fibonacci, ký hiệu $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

ở đây F_n là số hạng thứ n của dãy số Fibonacci.

Các số đầu tiên của dãy Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots.$$

Từ hệ thức truy hồi của dãy Fibonacci ta có

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0,$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó ta có phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ hay $x^2 = x + 1$. Nhân hai vế của phương trình với x^{n-1} ta được

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}. \tag{1.1}$$

Rõ ràng nếu φ là một nghiệm của phương trình (1.1) thì $1-\varphi$ cũng là một nghiệm của phương trình (1.1). Do đó

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1} \text{ và } (1-\varphi)^{n+1} = (1-\varphi)^n + (1-\varphi)^{n-1}.$$

Với mỗi cặp số thực a, b, ta đặt $F_{a,b}(n) = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$. Khi đó tất cả các hàm này thỏa mãn hệ thức truy hồi Fibonacci.

Định nghĩa 1.1.2. Các hàm $F_{a,b}(n) = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$ được gọi là hàm sinh.

Trong Định nghĩa dãy Fibonacci, các số hạng của dãy được cho dưới dạng truy hồi nên khi sử dụng dãy đôi khi gặp khó khăn. Mệnh đề sau đây cho ta công thức tường minh của dãy Fibonacci và được gọi là công thức Binet. Công thức Binet được sử dụng hữu hiệu trong các chứng minh sau này.

Mệnh đề 1.1.3. *Dãy số Fibonacci được cho bởi công thức*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Dãy Lucas là một dãy số được đặt tên nhằm vinh danh nhà toán học François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), người đã nghiên cứu dãy số Fibonacci, dãy số Lucas và các dãy tương tự. Giống như dãy Fibonacci, mỗi số trong dãy Lucas bằng tổng của hai số liền trước nó. Dãy số gồm thương giữa hai số Lucas liền nhau sẽ hội tụ đến giới hạn bằng tỉ lệ vàng.

Tuy vậy khác với dãy Fibonacci, hai số đầu tiên trong dãy Lucas là $L_0 = 2$ và $L_1 = 1$ (trong dãy Fibonacci là 0 và 1). Chính vì thế mà một số tính chất của số Lucas sẽ khác với số Fibonacci.

Định nghĩa 1.1.4. *Cho r, s là các số nguyên khác không. Dãy Lucas ứng với cặp (r, s) được định nghĩa là:*

$$u_0(r,s) = 0, u_1(r,s) = 1, u_n(r,s) = ru_{n-1} + su_{n-2}\,(n \geq 2)\,.$$

Trong trường hợp $(r, s) = (1, 1)$ ta kí hiệu số hạng thứ n của dãy là L_n và gọi ngắn gọn là dãy Lucas. Tương tự như dãy Fibonacci, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được dãy Lucas được cho bởi công thức sau.

Mệnh đề 1.1.5. *Với mọi số nguyên dương n, ta có*

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Từ Mệnh đề 1.1.3 và Mệnh đề 1.1.5 ta có định lý sau. Định lý cho ta mối liên hệ giữa các số hạng tổng quát của dãy Fibonacci và dãy Lucas.

Định lý 1.1.6. *Với mọi số nguyên dương $n > m$, ta có $F_nL_m = F_{n+m} + F_{n-m}$.*

Với mỗi số nguyên dương n ta đặt $F_{-n} = (-1)^nF_n$ và $L_n = (-1)^nL_n$.

1.2 Bài toán 779

Năm 1995, tạp chí "The Fibonacci Quarterly" số 33.1 đã giới thiệu bài toán B.779 của Andrew Cusumano. Nội dung của bài toán đó là:

Tìm các số nguyên a, b, c và d thỏa mãn $1 < a < b < c < d$ sao cho đồng nhất thức sau là đúng với mọi số nguyên dương n.

$$F_n = F_{n-a} + 6F_{n-b} + F_{n-c} + F_{n-d} \tag{1.2}$$

Đã có nhiều nhà toán học khác nhau gửi lời giải đến tạp chí "The Fibonacci Quarterly", hầu hết các nhà toán học chỉ gửi đến lời giải

$$a = 2, b = 5, c = 6, d = 8$$

và khẳng định rằng việc chứng minh đẳng thức

$$F_n = F_{n-2} + 6F_{n-5} + F_{n-6} + F_{n-8} \tag{1.3}$$

bằng phương pháp chứng minh quy nạp theo n là đơn giản. Chỉ có Bruckman và Figghion đã chứng minh cụ thể và chỉ ra cách tìm a, b, c, d. Tuy nhiên, các phương pháp tiếp cận và giải quyết bài toán dường như không có tính khái quát. Ta có thể có chứng minh đẳng thức (1.3) bằng phương pháp quy nạp theo n như sau:

Với $n = 8$ thì phương trình (1.3) tương đương với

$$F_8 = F_6 + 6F_3 + F_2 + F_0.$$

Đẳng thức hiển nhiên đúng vì $F_8 = 21, F_6 = 8, F_3 = 2, F_2 = 1, F_0 = 0$.

Giả sử đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $8 \leq k \leq n$. Ta chứng minh (1.3) đúng với $k = n + 1$. Theo Định nghĩa dãy Fibonacci và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}F_{n+1} &= F_n + F_{n-1}\\ &= \left(F_{n-2} + 6F_{n-5} + F_{n-6} + F_{n-8}\right)\\ &+ \left(F_{(n-1)-2} + 6F_{(n-1)-5} + F_{(n-1)-6} + F_{(n-1)-8}\right)\\ &= \left(F_{n-2} + F_{n-3}\right) + 6\left(F_{n-5} + F_{n-6}\right) + \left(F_{n-6} + F_{n-7}\right) + \left(F_{n-8} + F_{n-9}\right)\\ &= F_{n-1} + 6F_{n-4} + F_{n-5} + F_{n-7}.\end{aligned}$$

Vì vậy ta có

$$F_{n+1} = F_{(n+1)-2} + 6F_{(n+1)-5} + F_{(n+1)-6} + F_{(n+1)-8}.$$

1.3 Bài toán 804

Nội dung của bài toán 804 là: Hãy tìm tất cả các số nguyên a, b, c và d (với $1 < a < b < c < d$) sao cho đồng nhất thức sau đây là đúng với mọi số nguyên dương n

$$F_n = F_{n-a} + 9342F_{n-b} + F_{n-c} + F_{n-d}. \tag{1.4}$$

Ngay sau đó, năm 1997, L.A.G. Dersel đã đưa ra lời giải của bài toán 804 trong số 35.1 (1997) của tạp chí The Fibonacci Quarterly. Lời giải cụ thể như sau.

Từ nhận xét $9342 = 9349 - 7 = L_{19} - L_4$, ở đây L_k là số Lucas thứ k. Sử dụng các đồng nhất thức giữa các số Fibonacci và số Lucas ta có

$$F_{m+19} - F_{m-19} = F_m L_{19},$$

$$F_{m+4} + F_{m-4} = F_m L_4.$$

Trừ vế với vế của 2 đẳng thức trên ta nhận được

$$F_{m+19} - F_{m-19} - F_{m+4} - F_{m-4} = F_m \left(L_{19} - L_4\right).$$

Đặt $n = m + 19$, ta nhận được đẳng thức sau

$$F_n = F_{n-15} + 9342F_{n-19} + F_{n-23} + F_{n-38}.$$

Như vậy ta có các số trên cần tìm là: $a = 15, b = 19, c = 23, d = 38$. Bốn số trên chính là một lời giải của bài toán 804.

Nhận xét 1.3.1. (i) Trong thực tế, việc giải các bài toán 779 và 804, chính là việc tìm các số Fibonacci thỏa mãn các đồng thức đã nêu, hay nói cách khác chính là việc giải phương trình tuyến tính với các nghiệm là các số Fibonacci.

(ii) Rõ ràng ta có thể thay đổi hệ số của hạng tử thứ 2 của vế phải các đồng nhất thức trên và ta sẽ nhận lại được một bài toán mới với các lời giải khác nhau.

Ví dụ 1.3.2. Zeitlin đã tìm ra $a = 2, b = 20, c = 40, d = 1$ là lời giải của phương trình

$$F_n = F_{n-2} + 9349F_{n-20} + F_{n-40} + F_{n-41}$$

Trong chương sau (nội dụng chính của luận văn) chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải phương trình tuyến tính với các bộ nghiệm là các số Fibonacci.